第 12A 期 2001 年 12 月 | 电 子 学 报 ACTA ELECTRONICA SINICA | Vol.29 No.12A Dec. 2001

混合进制广义沃尔什函数的复制生成

张其善[1] ,张凤元[1] ,吴今培[2]

(1. 北京航空航天大学电子工程系 ,北京 100083 ;2. 五邑大学电子工程系 ,广东江门 529020)

摘 要: 本文把二进制、多进制沃尔什函数的复制生成理论推广到了混合进制情形 ,给出了混合进制广义沃尔什函数的复制生成方法 ,并对复制生成方法进行了数学分析. 它对信号的复制生成理论的深入研究有一定的理论价值.

关键词: 混合进制广义沃尔什函数; 广义平移复制; 数学分析

中图分类号: TN911.7 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2001) 12A-1944-03

The Copy Theory of Generalized Walsh Function for Hybrid Carry System

ZHANG Qi-shan[1] ,ZHANG Feng-yuan[1] ,WU Jin-pei[2]

(1. *Dept. of Electronic Engineering , BUAA , Beijing* 100083 , *China ;*

2. *Dept. of Electronic Engineering , Wuyi University , Jiangmen , Guangdong* 529020 , *China)*

Abstract : A method is presented in this paper which extends the copy theory of Walsh function from binary and multi-system to hybrid carry system. The copy theory of generalized Walsh function for hybrid carry system is first discussed in detail ,and then analyzed mathematically. It is of importance for deep research of signal copy theory.

Key words : generalized Walsh function for hybrid carry system ;generalized shift copy ;mathematical analysis

1 引言

复制理论是沃尔什函数、桥函数和广义桥函数的生成基础. 沃尔什函数早已被广大工程技术人员所熟悉 ,它的应用领域涉及到通信、雷达 ,电视、图象处理、数据处理和模式识别等诸多方面 ,特别是在当今 CDMA 移动通信中得到了广泛的应用. 文献[1 ,2]详细地介绍了利用沃尔什函数的序号的二进制码作为复制信息 ,而不需要借助任何其他数学工具即可将沃尔什函数复制出来 ;利用奎斯特恩逊(Chrestenson) 函数的序号的 P 进制码作为复制信息 ,将奎斯特恩逊(Chrestenson) 函数复制出来. 并根据复制理论和复制信息码的特性 ,分别推导了 P 编号、H 编号、W 编号和 X 编号的沃尔什函数和奎斯特恩逊(Chrestenson) 函数. 文献[3]讨论了更一般的信号复制生成理论及其应用. 文献[4]给出了混合进制广义沃尔什函数的定义 ,我们将利用混合进制广义沃尔什函数的序号 ,用序号的混合进制码作为复制信息 ,用广义平移复制方法把混合进制广义沃尔什函数复制出来 ,并给出了复制方法的数学分析. 它对信号的复制生成及对序列码的深入研究有一定的理论价值.

2 混合进制广义沃尔什函数的定义

设 $N_0 , N_1 , \cdots, N_{m-1} , \cdots,$是给定的整数序列 ,其中 $N_i > 1$, $i = 0,1,2, \cdots, m-1, \cdots$: 那么前 $N = N_0 N_1 N_2 \cdots N_{m-1}$个混合 $(N_{m-1} , N_{m-2} , \cdots, N_2 , N_1 , N_0)$ 进制广义沃尔什函数的定义为 :

$$MW_k(t) = \exp\{\mathrm{j}2\pi \sum_{s=0}^{m-1} n_s t_s / N_s\}$$

其中

$k = 0,1,2, \cdots, N-1.\ n_s , t_s \in \{0,1, \cdots, N_s - 1\}$, $t \in [0,1)$, $t = \sum_{s=0}^{\infty} t_s (\prod_{i=0}^{s} N_i)^{-1}$, $k = \sum_{s=0}^{\infty} n_s (\prod_{i=0}^{s-1} N_i)$,并规定 $\prod_{i=0}^{-1} N_i = 1$.

若记 $\omega_s = e^{\mathrm{j}2\pi / N_s}$, $s = 0,1,2, \cdots, m-1$,则 $MW_k(t) = \prod_{s=0}^{m-1} \omega_s^{n_s t_s}$.

前 N 个混合 $(N_{m-1} , N_{m-2} , \cdots, N_2 , N_1 , N_0)$ 进制广义沃尔什函数是定义在区间 $[0,1)$ 上的多复值函数 ,但它只取有限个不同的值. 如果整数 $N_0 , N_1 , N_2 , \cdots, N_{m-1}$的最小公倍数为 M ,则前 N 个混合 $(N_{m-1} , N_{m-2} , \cdots, N_2 , N_1 , N_0)$ 进制广义沃尔什函数将取 M 个不同的复数值 ,且在区间 $[\frac{l}{N} , \frac{l+1}{N})$ $(l = 0,1, 2, \cdots, N-1)$ 上恒取定值.

3 混合进制广义沃尔什函数的复制生成

对于前 $N = N_0 N_1 N_2 \cdots N_{m-1}$个混合 $(N_{m-1} , N_{m-2} , \cdots, N_2 , N_1 , N_0)$ 进制自然码排序的混合进制广义沃尔什函数 $MW_k(k)$,利用序号 k 的混合 $(N_{m-1} , N_{m-2} , \cdots, N_2 , N_1 , N_0)$ 进制自然码 $(n_{m-1} , n_{m-2} , \cdots, n_2 , n_1 , n_0)$ 作为复制信息 ,用广义平移

收稿日期:2001-05-22 ;修回日期:2001-10-09

基金项目:国家自然科学基金(No.69972002 ;No.69931050)

复制方法把混合进制广义沃尔什函数 $MW_k(t)$ 复制出来,复制步骤如下:

(1) 写出序号 k 的 m 位混合 $(N_{m-1}, N_{m-2}, \cdots, N_2, N_1, N_0)$ 进制自然码 $k=(n_{m-1}, n_{m-2}, \cdots, n_2, n_1, n_0)$,即 $k=\sum_{s=0}^{m-1} n_s(\prod_{i=0}^{s-1} N_i)$ 并规定 $\prod_{i=0}^{-1} N_i = 1$

(2) 以序号 k 的 m 位混合 $(N_{m-1}, N_{m-2}, \cdots, N_2, N_1, N_0)$ 进制自然码为复制信息,进行 m 个周期的复制过程:

第一个周期:

初始序列为 1,先对其进行 $N_{m-1}-1$ 次平移复制,n_{m-1} 为第一次复制信息. 若 $n_{m-1}=j\,(j=0,1,2,\cdots,N_{m-1}-1)$,那么第 l 次平移复制的乘因子为 $(\omega^j_{m-1})^l$, $l=1,2,\cdots,N_{m-1}-1$. 平移后得到 $N_{m-1}-1$ 个元素,连同 1 本身平移后共有 N_{m-1} 个元素. 此时函数值序列为 $1\quad \omega^j_{m-1}\quad (\omega^j_{m-1})^2\quad \cdots\quad (\omega^j_{m-1})^{N_{m-1}-1}$ 记为 χ_1

第 i 个周期:

对序列 χ_{i-1} 进行 $N_{m-i}-1$ 次平移复制,以 n_{m-i} 为复制信息,若 $n_{m-i}=j$, $(j=0,1,2,\cdots,N_{m-i}-1)$,那么第 l 次平移复制的乘因子为 $(\omega^j_{m-i})^l$, $l=1,2,\cdots,N_{m-i}-1$,平移后连同 χ_{i-1} 本身共有 $N_{m-1}N_{m-2}\cdots N_{m-i}$ 个元素. 此时函数值序列为 $\chi_{i-1}\quad \omega^j_{m-i}\quad \chi_{i-1}\quad (\omega^j_{m-i})^2\chi_{i-1}\quad \cdots\quad (\omega^j_{m-i})^{N_{m-i}-1}\chi_{i-1}$,记为 χ_i

完成 m 个周期的平移复制过程后,所得到的序列 χ_m 就是混合 $(N_{m-1}, N_{m-2}, \cdots, N_2, N_1, N_0)$ 进制广义沃尔什函数 $MW_k(t)$ 在自变量 t 从 0 至 1 连续取值时,相应函数 $MW_k(t)$ 在长度为 $1/N$ 的小区间上依次得到的函数值组成的序列.

4　复制方法的数学分析

先对自变量 t 进行分析,$t\in[0,1)$, $(t_0t_1t_2\cdots t_{m-1}\cdots)$ 是小数 t 的无穷维混合 $(\cdots N_{m-1}, N_{m-2}, \cdots, N_2, N_1, N_0)$ 进制自然码表示,则有

引理 1　若将区间 $[0,1)$ 等分成 $N=N_0N_1N_2\cdots N_{m-1}$ 个小区间 $[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N})$, $i=0,1,2,\cdots,N-1$,则当 $t\in[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N})$ 时,$(t_0t_1t_2\cdots t_{m-1})$ 恰好是整数 i 的混合 $(N_0, N_1, N_2, \cdots, N_{m-1})$ 进制自然码.

证明　区间 $[0,\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-2}}) = [0,\frac{1}{N})\cup[\frac{1}{N},\frac{2}{N})\cup\cdots\cup[\frac{N_{m-1}-1}{N},\frac{N_{m-1}}{N})$,当 t 以跨度 $\frac{1}{N}$ 从 0 向 $\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-2}}$ 变化时,即 t 从第 0 个小区间向第 N_{m-1} 个小区间依次取值时,t 的码 $t_0=t_1=\cdots=t_{m-2}=0$,而 t_{m-1} 依次从 0 取到 $N_{m-1}-1$,即当 $t\in[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N})$ 时,$(t_0t_1t_2\cdots t_{m-1})$ 恰好是整数 i 的混合 $(N_0, N_1, N_2, \cdots, N_{m-1})$ 进制自然码,$0\le i\le N_{m-1}-1$.

当 t 属于第 N_{m-1} 到第 $N_{m-1}N_{m-2}-1$ 个小区间时,

$$\bigcup_{i=N_{m-1}}^{N_{m-1}N_{m-2}-1}[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N}) = [\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-2}},\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-3}}) = \bigcup_{j=1}^{N_{m-2}-1}[\frac{j}{N_0N_1\cdots N_{m-2}},\frac{j+1}{N_0N_1\cdots N_{m-2}})$$

t 以跨度 $\frac{1}{N}$ 从 $[\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-2}}$ 向 $\frac{2}{N_0N_1\cdots N_{m-2}})$ 变化时,$t_0=t_1=\cdots=t_{m-3}=0$, $t_{m-2}=1$, t_{m-1} 依次从 0 取到 $N_{m-1}-1$.

t 以跨度 $\frac{1}{N}$ 从 $\frac{s}{N_0N_1\cdots N_{m-2}}$ 向 $\frac{s+1}{N_0N_1\cdots N_{m-2}}$ $(2\le s\le N_{m-2}-1)$ 变化时,$t_0=t_1=\cdots t_{m-3}=0$, $t_{m-2}=s$, t_{m-1} 依次从 0 取到 $N_{m-1}-1$.

因此,当 $t\in[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N})$ 时,$(t_0t_1t_2\cdots t_{m-1})$ 恰好是整数 i 的混合 $(N_0, N_1, N_2, \cdots, N_{m-1})$ 进制自然码,其中 $N_{m-1}\le i\le N_{m-1}N_{m-2}-1$.

一般地,当 t 在 $[\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-k}},\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-k-1}})$ 内依次变化,即 t 从第 $N_{m-1}\cdots N_{m-k}$ 个区间到第 $N_{m-1}\cdots N_{m-k}N_{m-k-1}$ 个区间依次取值时,$t_0=t_1=\cdots t_{m-k-2}=0$, t_{m-k-1} 依次从 1 取到 $N_{m-k-1}-1$; t_s 重复地依次从 0 取到 N_s-1,其中 $m-k\le s\le m-1$.

综上所述,当 $t\in[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N})$ 时,$i=0,1,2,\cdots,N-1$, $(t_0t_1t_2\cdots t_{m-1})$ 恰好是整数 i 的混合 $(N_0, N_1, N_2, \cdots, N_{m-1})$ 进制自然码. 证毕.

定理 1　对序号为 k 的混合 $(N_{m-1}, N_{m-2}, \cdots, N_2, N_1, N_0)$ 进制广义沃尔什函数 $MW_k(t)$ 进行序列复制时,第个周期的平移复制区间是 $[\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-i}},\frac{N_{m-i}}{N_0N_1\cdots N_{m-i}})$,在此区间上对序列 χ_{i-1} 进行 $N_{m-i}-1$ 次平移复制,以 n_{m-i} 为复制信息,若 $n_{m-i}=j$, $(j=0,1,2,\cdots,N_{m-i}-1)$,那么第 l 次平移复制的乘因子为 $(\omega^j_{m-i})^l$, $l=1,2,\cdots,N_{m-i}-1$,平移后连同 χ_{i-1} 本身,在区间 $[0,\frac{N_{m-i}}{N_0N_1\cdots N_{m-i}})$ 上函数值序列为 $\chi_{i-1}\quad \omega^j_{m-i}\chi_{i-1}\quad (\omega^j_{m-i})^2\chi_{i-1}\quad \cdots\quad (\omega^j_{m-i})^{N_{m-i}-1}\chi_{i-1}$,记为 χ_i,共有 $N_{m-1}N_{m-2}\cdots N_{m-i}$ 个元素.

证明　将区间 $[0,1)$ 等分成 $N=N_0N_1N_2\cdots N_{m-1}$ 个小区间 $I_s=[\frac{s}{N},\frac{s+1}{N})$, $s=0,1,2,\cdots,N-1$.

(1) 当 $i=1$ 时,第 1 个周期的平移复制区间是 $[\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-1}},\frac{N_{m-1}}{N_0N_1\cdots N_{m-1}}) = \bigcup_{s=1}^{N_{m-1}-1} I_s$,当 t 在该区间依次变化时,由引理 1 知,$t_0=t_1=\cdots=t_{m-2}=0$,而 t_{m-1} 依次从 1 取到 $N_{m-1}-1$,相应地,$MW_k(k)=\prod_{s=0}^{m-1}\omega_s^{n_s t_s}=\omega_{m-1}^{n_{m-1}t_{m-1}}=\omega_{m-1}^{jt_{m-1}}$ 的值依次取为 $\omega^j_{m-1}\quad (\omega^j_{m-1})^2\quad \cdots\quad (\omega^j_{m-1})^{N_{m-1}-1}$,这相当于对 1 进行了 $N_{m-1}-1$ 次平移,第 l 次平移的乘因子为 $(\omega^j_{m-1})^l$, $l=1,2,\cdots,N_{m-1}-1$. 平移后连同 1 本身,在区间 $[0,\frac{N_{m-1}}{N_0N_1\cdots N_{m-1}})$ 上函数值序列为 $1\quad \omega^j_{m-1}\quad (\omega^j_{m-1})^2\quad \cdots\quad (\omega^j_{m-1})^{N_{m-1}-1}$,记为 χ_1,共有 N_{m-1} 个元素.

(2) 当 $i=2$ 时,第 2 个周期的平移复制区间是 $[\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-2}},\frac{N_{m-2}}{N_0N_1\cdots N_{m-2}}) = \bigcup_{i=N_{m-1}}^{N_{m-1}N_{m-2}-1} I_i$,当 t 在该区间依

次变化时,由引理 1 知,

t 从区间 $I_{N_{m-1}}$ 到 $I_{2N_{m-1}-1}$ 区间变化时, $t_0=t_1=\cdots t_{m-3}=0$, $t_{m-2}=1$, t_{m-1} 依次从 0 取到 $N_{m-1}-1$. $MW_k(t)=\prod_{s=0}^{m-1}\omega_s^{n_st_s}=\omega_{m-2}^{n_{m-2}t_{m-1}}\ \omega_{m-1}^{n_{m-2}t_{m-1}}=\omega_{m-2}^{n_{m-2}}\ \omega_{m-1}^{n_{m-1}t_{m-1}}$ 的值依次取为

$$\omega_{m-2}^{n_{m-2}}\ \omega_{m-1}^{n_{m-1}}\qquad \omega_{m-2}^{n_{m-2}}\ \omega_{m-1}^{2n_{m-1}}\qquad\cdots\qquad \omega_{m-2}^{n_{m-2}}\ \omega_{m-1}^{(N_{m-1}-1)n_{m-1}}$$

这恰好是第一次平移所得的序列 $\omega_{m-2}^{n_{m-2}}\ \chi_1$.

t 从区间 $I_{IN_{m-1}}$ 到区间 $I_{(l+1)N_{m-1}-1}$ 变化时, $t_0=t_1=\cdots t_{m-3}=0$, $t_{m-2}=l$, t_{m-1} 依次从 0 取到 $N_{m-1}-1$. $MW_k(t)=\prod_{s=0}^{m-1}\omega_s^{n_st_s}=\omega_{m-2}^{n_{m-2}t_{m-2}}\omega_{m-1}^{n_{m-1}t_{m-1}}=(\omega_{m-2}^{n_{m-2}})^l\omega_{m-1}^{n_{m-1}t_{m-1}}$ 的值依次取为

$$(\omega_{m-2}^{n_{m-2}})^l\omega_{m-1}^{n_{m-1}}\qquad(\omega_{m-2}^{n_{m-2}})^l\omega_{m-1}^{2n_{m-1}}\qquad\cdots\qquad(\omega_{m-2}^{n_{m-2}})^l\omega_{m-1}^{(N_{m-1}-1)n_{m-1}}$$

这恰好是第 l 次平移所得的序列 $(\omega_{m-2}^{n_{m-2}})^l\chi_1$, $l=2,\cdots,N_{m-2}-1$.

第 2 个周期的平移复制完成后,连同 χ_1 本身,在区间 $[0,\frac{N_{m-2}}{N_0N_1\cdots N_{m-2}})$ 上函数值序列为 $\chi_1\quad\omega_{m-2}^j\chi_1\quad(\omega_{m-2}^j)^2\chi_1\quad\cdots\quad(\omega_{m-2}^j)^{N_{m-2}-1}\chi_1$ (其中 $j=n_{m-2}$), 记为 χ_2, 共有 $N_{m-2}N_{m-1}$ 个元素.

(3) 第 i 个周期的平移复制区间是 $[\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-i}},\frac{N_{m-i}}{N_0N_1\cdots N_{m-i}})=\bigcup_{p=1}^{N_{m-i}-1}[\frac{p}{N_0N_1\cdots N_{m-i}},\frac{p+1}{N_0N_1\cdots N_{m-i}})$

当 t 在该区间依次变化时,由引理 1 知, $t_0=t_1=\cdots t_{m-i-1}=0$, t_{m-i} 依次从 1 取到 $N_{m-i}-1$, 并且当 t 在区间 $[0,\frac{p}{N_0N_1\cdots N_{m-i}},\frac{p+1}{N_0N_1\cdots N_{m-i}})$ 上依次变化时, $t_0=t_1=\cdots t_{m-i-1}=0$, $t_{m-i}=p$, $(t_{m-i+1}t_{m-i+2}\cdots t_{m-1})$ 的取值与 t 在 $[0,\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-1}})$ 上依次变化时 $(t_{m-i+1}t_{m-i+2}\cdots t_{m-1})$ 的取值相同. 因此当 t 在区间 $[\frac{p}{N_0N_1\cdots N_{m-i}},\frac{p+1}{N_0N_1\cdots N_{m-i}})$ 上依次变化时, $MW_k(t)=\prod_{s=0}^{m-1}\omega_s^{n_st_s}=(\omega_{m-i}^{n_{m-i}})^p\prod_{s=m-i+1}^{m-1}\omega_s^{n_st_s}$ 依次取值为序列 $(\omega_{m-i}^{n_{m-i}})^p\chi_{i-1}$, 这恰好是以 n_{m-i} 为复制信息,对 χ_{i-1} 进行第 p 次平移所得的序列. 因此,当 t 在区间 $[\frac{1}{N_0N_1\cdots N_{m-i}},\frac{N_{m-i}}{N_0N_1\cdots N_{m-i}})$ 上依次变化时, $MW_k(t)=\prod_{s=0}^{m-1}\omega_s^{n_st_s}$ 依次取值为序列 $(\omega_{m-i}^{n_{m-i}})^1\chi_{i-1}\quad(\omega_{m-i}^{n_{m-i}})^2\chi_{i-1}\quad\cdots\quad(\omega_{m-i}^{n_{m-i}})^{N_{m-i}-1}\chi_{i-1}$, 这恰好是以 n_{m-i} 为复制信息,对 χ_{i-1} 进行 $N_{m-i}-1$ 次平移所得的序列. 连同 χ_{i-1} 本身,在区间 $[0,\frac{N_{m-i}}{N_0N_1\cdots N_{m-i}})$ 上函数值序列为 $\chi_{i-1}\quad\omega_{m-i}^j\chi_{i-1}\quad(\omega_{m-i}^j)^2\chi_{i-1}\quad\cdots\quad(\omega_{m-i}^j)^{N_{m-i}-1}\chi_{i-1}$ (其中 $j=n_{m-i}$), 记为 χ_i, 共有 $N_{m-1}N_{m-2}\cdots N_{m-i}$ 个元素. 证毕.

桥函数与复制理论在通信、信息传输、信号处理等领域有很好的应用前景,桥函数与复制理论的应用研究仍在进一步研究之中,已有不少成果,见文献[5]. 我们相信对桥函数与复制理论的深入研究,一定会取得更大的成果.

参考文献:

[1] 张其善,张有光. 桥函数理论及其应用[M]. 北京:国防工业出版社,1992.

[2] 饶雪芳,张其善. 广义桥函数理论及其应用[M]. 北京:国防工业出版社,1998.

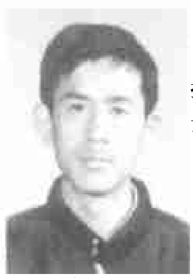
[3] 张其善,金明录. 信号的复制生成理论极其应用[M]. 北京:邮电出版社,2001.

[4] 张公礼,潘爱玲. 数字谱方法的理论与应用[M]. 北京:国防工业出版社,1992.

[5] Slimane Ben Slimane, Abdullatif Glass. Multi-carrier CDMA systems using bridge functions [A]. Vehicular Technology Conference Proceedings 2000 [C], VTC2000-Spring Tokyo, 2000 IEEE 51st, 2000, 3: 1928 - 1932.

作者简介:

张其善 男. 1936 年出生于浙江浦江. 北京航空航天大学教授,博士生导师,国家级有突出贡献的科技专家. 中国电子学会会士,美国 IEEE 高级会员. 主要从事信息传输与处理、GPS 等方面的研究.



张凤元 男. 1965 年出生于河北尚义. 副教授. 现在在北京航空航天大学电子工程系攻读博士学位,主要从事信息传输与处理方面的研究.

吴今培 男. 1937 年生于湖南湘潭. 五邑大学教授. 博士生导师,主要从事信号与信息处理、智能检测与故障诊断.